# Binary Forms and Orders of Algebraic Number Fields (2元形式と代数体の整環)

| | |
|---|---|
| 氏名・(本籍) | 中川　仁（なかがわ　じん） |
| 学位の種類 | 理　学　博　士 |
| 学位記番号 | 理博第　1137　号 |
| 学位授与年月日 | 平成元年4月26日 |
| 学位授与の要件 | 学位規則第5条第1項該当 |
| 研究科専攻 | 東北大学大学院理学研究科<br>（博士課程）数学専攻 |
| 学位論文題目 | Binary Forms and Orders of Algebraic Number Fields<br>（2元形式と代数体の整環） |
| 論文審査委員 | （主査）<br>教　授　森田康夫　　教　授　佐武一郎<br>教　授　小田忠雄 |

# 論　文　目　次

# 論 文 内 容 要 旨

代数体の類数は重要な不変量であり多くの数学者によって研究されてきた。それは有限回のステップで計算できるが，一般の場合に有効なアルゴリズムは知られていない。虚２次体の場合には二つの実効的方法が知られている。第１の方法は解析的類数公式であり，第２の方法は簡約２元２次形式の個数を数えることである。第２の方法は，判別式Ｄの２次体の狭義イデアル類の集合と判別式Ｄの２元２次形式の $SL_2(Z)$－同値類の集合との間に全単射があるという事実に基づいている。そこで，「ｎが３以上の自然数のとき，２元ｎ次形式の同値類の集合には何が対応するか？」という問題が考えられる。ｎ＝３に対する解答は Davenport と Heilbronn によって与えられた。彼等は，そのガロア閉包が２次体上の不分岐３次巡回拡大になるような３次体の集合とある合同条件を満たす２元３次形式の $GL_2(Z)$－同値類の集合との間に全単射があることを示した。さらに，彼等は類体論と２元３次形式の類数に関する Davenport の結果を用いて，２次体の類数の３パートの和に対する漸近公式を得た。

本論文の目的は，ｎが４以上の自然数のときに２元ｎ次形式の類数について研究し，無限素点も込めてすべての素点において不分岐であるような（以後，強不分岐という）$A_n$－拡大を持つ実２次体が無数に存在することを示すことである。

第１章は序論である。我々の結果は Davenport と Heibronn による整数係数の２元３次形式に関する仕事の一般化であるので，まず最初に２元形式の基礎事実を復習し，その後彼等の結果をまとめる。

§1.1では，２元ｎ次形式の判別式の定義と２次一般線型群の２元ｎ次形式への作用を復習する。判別式の重要な性質として，それが係数の２（ｎ－１）の同次式であること，及び一般線型群の作用に関する準不変量であることを注意する。代数体の整数環を係数とする２元ｎ次形式の類数の有限性は1972年に Birch と Merriman によって証明された。§1.2では，２元２次形式と２次体の類数に関する古典的な結果を復習する。§1･3では，まず２元３次形式の類数に関する Davenport の結果を復習する。正の判別式を持つ２元３次形式が簡約であることをそのヘッシアンとして得られる正定値２元２次形式が簡約であることと定義する。彼等は，この簡約理論と３次体と２元３次形式の同値類の対応を用いて，３次体の判別式の密度，及び２次体の類数のパートの平均値を求めた。

§２では，まず類体論と類数の可除性に関する結果から，「与えられた自然数ｎに対して，強不分岐ｎ次巡回拡大を持つ実２次体が無数に存在すること」を導く。２次体の別のタイプの不分岐ガロア拡大については，山本芳彦氏と内田興二氏によって，「与えられた自然数ｎに対して，すべての有限素点において不分岐であるような（以後，弱不分岐という）$A_n$－拡大を持つ２次体が無数に存在すること」が構成的に証明されている。また，山村健氏によって，「強不分岐 $A_5$－拡大を持つ実２次体が無数に存在すること」が証明されている。これらの議論は特別

なn次モニック多項式の判別式が非常に簡単な形をしていることに基づいている。これに対して，我々は2元n次式形全体を考え，その中に分解体が実2次体上の強不分岐$A_n$－拡大になるようなものが正の密度で存在することを示す。

§3では，定理の証明方針を説明する。まず，2元n次形式を調べる。我々の主なアイディアは高次の2元形式に対して，2元3次形式のヘッシアンの適当な類似を定義することである。これは次のようにして得られる。有理数体上既約な2元n次形式fの根を用いて，その根を有理数体に添加して得られるn次体に含まれる格子$O_f$を作る。その格子は実は整環になり，その判別式は2元n次形式fの判別式と一致している。この整環$O_f$の元の2乗のトレースをとるという2次形式を，トレース＝0となる超平面上に制限することによって得られるn－1元2次形式$\Psi$(f)が求めるものである。実際に，n＝3のとき，これはヘッシアンの定数倍になっている。2元n次形式fが実数体上でn個の1次式の積に分解するとき，総実であるということにする。Minkowskiの意味での簡約な正定値n－1元2次形式の全体をMとすると，2元n次形式の空間の錐体Fを，Mを$GL_{n-1}$(Z)のある元Tで変換した領域の内部に$\Psi$(F)が含まれるように取れる。領域Mの性質と写像$\Psi$の性質からFに含まれる相異なる二つの2元n次形式は$GL_2$(Z)－同値にはならないことがわかる。また，Fに含まれるfは総実であることもわかる。以上のことから，$F_X$をFに含まれる2元n次形式で判別式がX以下のものの全体とすれば，$F_X$に含まれる格子点の個数を数えることによって，判別式がX以下であるような総実な2元n次形式の$GL_2$(Z)－同値類の個数の下からの評価を得る。Fに含まれる相異なる二つの2元n次形式f, gに対して整環$O_f$と$O_g$が同型でないことも，領域Mの性質と写像$\Psi$の性質からわかる。したがって，n次総実代数体に含まれる整環で判別式がX以下であるものの同型類の個数についても，同じ下からの評価を得る。さらに，ある合同条件を満たすようなFの元fの個数を数えることによって，そのガロア閉包が実2次体の強不分岐$A_N$－拡大であるようなn次総実代数体に含まれる整環で判別式がX以下であるものの同型類の個数についても，同様の下からの評価を得る。この評価の一つの帰結として，強不分岐$A_N$－拡大を持つ実2次体が無数に存在することがでる。

§4では，他の著者による関連結果について言及し，今後の課題を述べる。

第2章が本論である。まず，§0で記号の説明をし，結果の主張を述べる。

§1では，有理数体上既約な2元n次形式fに対して格子$O_f$を定義し，それが整環であることを，環の構造定数を具体的にfの係数で表すことによって証明する。次に，fに付随するn－1元2次形式$\Psi$(f)を定義し，その基本的性質を調べる。写像$\Psi$の下で，n－1元2次形式の空間上の$GL_{n-1}$の作用と2元n次形式の空間上の$GL_2$の作用がコンパチブルであること，及びnが4以上のとき$\Psi$はある開集合上で単射であることを証明する。

§2では，各奇素数pに対して，$U_p$を有限体$F_p$に係数を持つ2元n次形式で重複因子を高々1つしか持たず，もし持っても重複度2であるようなものの集合とする。$U_2$を$F_2$に係数を持

つ2元n次形式で重複因子を持たないものの集合とする。このとき，整数係数で既約な2元n次形式fが，すべての素数pに対して $f \bmod p \in U_p$ を満たせばfの分解体は2次体上の弱不分岐 $A_n$ー拡大になることを示す。また，$U_p$ の元の個数を求める。

§3では，N次元ユークリッド空間の有界開集合Dでその境界が適当な条件を満たすものとするとき，領域tDに含まれる格子点の個数に対する良く知られた漸近公式を合同条件を付け加えた形に拡張する。

§4では，有理数体上可約な整数係数多項式の個数を上から評価する。

§5において，これまでに準備したことを用いて第1章§3で説明した方針に従って定理の証明を与える。

# 論文審査の結果の要旨

二次形式の類数については，古来多くの研究があり，類数の有限性は，類数の計算方法等良く知られている。しかし高次の二元形式については，Birch-Merriman により類数の有限性は知られてはいるが，あまり多くのことは知られていない。

これに対し，2元3次形式については，Davenport, Heilbronn による研究があり，次のようなことが知られている。

(1) 整数係数の二元3次形式で，既約でその判別式が D となるもの全体のモジュラー群に関する同値類の個数を h(D)と置く。このとき，D が正でかつ X 以下となる h(D)の和，および D が負でかつ $-X$ となる h(D)の和の，$X\to\infty$ としたときの漸近値が求められる。

(2) 3次体 K で，その判別式 $D_K$ が正で X 以下となるものの個数，および3次体 K で，その判別式 $D_K$ が負で $-X$ 以上となるものの個数の，$X\to\infty$ としたときの漸近値も，同様に求められる。

この場合本質的なことは，二元3次形式に対しては，Hessian という二次形式が定義され，それを使って二次形式の研究に帰着することが出来たことである。これに対し，二元の高次形式については Hessian にあたるものが定義されておらず，したがって，上記の様な結果も得られていなかった。

そこで本論文で中川仁は，二元高次形式に対して Hessian に当たるものを定義し，それを使うことにより，高次の二元形式に対しても，判別式が正で X 以下となるものの同値類の個数，および判別式が負で $-X$ 以上となるものの個数の，下からの評価を得た。またこの結果を使って，高次の代数体の有限生成な部分環の個数についても，その個数の下からの評価を得た。

中川仁のこの研究は，高次の二元形式の類数に対する著しい結果であり，しかも新しい研究手段を与えるものである。

また，本論文の審査および最終試験により，中川仁は自立して研究を行なうのに十分な研究能力と学識を有するものと認められた。

よって中川仁提出の論文は，理学博士の学位論文として合格であると認める。